基本例題 014 補助教材

指針　数列 $\{a_n\}$ が $n \longrightarrow \infty$ のとき α に収束するならば，次が成り立つ。
「任意の正の実数 ε に対して，ある自然数 N が存在して，$n \geqq N$ であるすべての自然数 n について $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ が成り立つ」
よって，収束しないことを示すためには，上の否定
「ある正の実数 ε が存在して，任意の正の自然数 N に対し，$n \geqq N$ を満たすある n について $|a_n-\alpha| \geqq \varepsilon$ が成り立つ」 を示す。

(1)　$a_n=\dfrac{(-1)^n}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ が実数の定数 α に収束しないことを示す。

$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ とする。

任意の自然数 N に対して，$n \geqq N$ を満たす n として，$n=\begin{cases} 2N & (\alpha<0 \text{ のとき}) \\ 2N+1 & (\alpha \geqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ と

とると　$|a_n-\alpha| \geqq \dfrac{1}{2}=\varepsilon$

よって，与えられた数列は収束しない。　■

(2)　$a_n=2n$ とし，数列 $\{a_n\}$ が実数の定数 α に収束しないことを示す。

$\varepsilon=1$ とする。

任意の自然数 N に対して，$n \geqq N$ を満たす n として，$\max\left\{N,\ \dfrac{1+\alpha}{2}\right\}$ を超える自然数をとると　$|a_n-\alpha|=|2n-\alpha|=2n-\alpha \geqq 2\cdot\dfrac{1+\alpha}{2}-\alpha=1=\varepsilon$

よって，与えられた数列は収束しない。　■

(3)　$a_n=(-1)^n n$ とし，数列 $\{a_n\}$ が実数の定数 α に収束しないことを示す。

$\varepsilon=1$ とする。

任意の自然数 N に対して，$n \geqq N$ を満たす n として，$\max\{N,\ |\alpha|+1\}$ を超える自然数をとると

$$\begin{aligned} |a_n-\alpha| &= |(-1)^n n-\alpha| \geqq \big||(-1)^n n|-|\alpha|\big| \\ &= \big|n-|\alpha|\big| \\ &= n-|\alpha| \\ &\geqq (|\alpha|+1)-|\alpha|=1=\varepsilon \end{aligned}$$

よって，与えられた数列は収束しない。　■