補助教材

定理 1－2　合成関数の極限
関数 $f(x)$，$g(x)$ について，$\lim_{x \to a} f(x) = b$，$\lim_{x \to b} g(x) = \alpha$ とし，$g(x)$ は $x = b$ で連続とする。このとき，合成関数 $(g \circ f)(x)$ について，$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \alpha$ が成り立つ。

ここで，「$g(x)$ が $x = b$ で連続」という条件は必要不可欠である。最初にこの条件を与えなかった場合の定理の反例を述べた後に，条件が必要である背景について説明しよう。

例
$f(x)$ は $f(x) = b$ なる定数関数とし，$g(x)$ を

$$g(x) = \begin{cases} \alpha & (x \fallingdotseq b) \\ \alpha + 1 & (x = b) \end{cases}$$

とする。$g(x)$ は $x = b$ で連続でないことに注意しよう。$\lim_{x \to b} g(x)$ は $x \fallingdotseq b$ を保ちながら x を b に近づけたときの極限であるから，$\lim_{x \to b} g(x) = \alpha$ である。ところが，合成関数 $(g \circ f)(x)$ は $(g \circ f)(x) = \alpha + 1$ という定数関数であるから

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \alpha + 1 \fallingdotseq \alpha = \lim_{x \to b} g(x)$$

である。

このような反例が存在する理由を，$\varepsilon - \delta$ 論法を用いて検討してみよう。定理 1－2 の仮定 $\lim_{x \to a} f(x) = b$ と $\lim_{x \to b} g(x) = \alpha$ を，$\varepsilon - \delta$ 論法で述べると，それぞれ次のようになる。

[1]　任意の正の実数 δ_1 に対して，ある正の実数 δ が存在して，$0 < |x - a| < \delta$ であるすべての x について $|f(x) - b| < \delta_1$ が成り立つ。
[2]　任意の正の実数 ε に対して，ある正の実数 δ_1 が存在して，$0 < |y - b| < \delta_1$ であるすべての y について $|g(y) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ。

合成関数 $(g \circ f)(x)$ の極限を議論するために，これらの条件 [1]，[2] を $(y = f(x)$ として$)$ 組み合わせる。具体的には，[1] における $|f(x) - b| = |y - b| < \delta_1$ を [2] における $0 < |y - b| < \delta_1$ に接合させて，[1]，[2] を 1 つの条件にまとめたいわけであるが，その際，$|y - b| = 0$，すなわち $f(x) = b$ となるところがうまく整合しない。すなわち，関数 $y = f(x)$ が $0 < |x - a| < \delta$ において値 b をとってしまうときは，$0 < |y - b| < \delta_1$ を満たさないため，そのままこれらの条件を組み合わせることができないのである。
この不整合を克服するために，「$g(x)$ の $x = b$ における連続性」が必要となる。すなわち，関数 $g(x)$ は $x = b$ も含めて定義されており，$\lim_{x \to b} g(x) = g(b)$ が成り立つものと仮定する。これにより，$y = b$ のとき $g(y) = \alpha$ となることから，条件 [2] における

$$0<|y-b|<\delta_1 \text{ であるすべての } y \text{ について } |g(y)-\alpha|<\varepsilon \text{ が成り立つ}$$

の部分を

$$|y-b|<\delta_1 \text{ であるすべての } y \text{ について } |g(y)-\alpha|<\varepsilon \text{ が成り立つ}$$

に取り替えてもよい。そして，これに取り替えた条件

[3]　任意の正の実数 ε に対して，ある正の実数 δ_1 が存在して，$|y-b|<\delta_1$ であるすべての y について $|g(y)-\alpha|<\varepsilon$ が成り立つ。

を考えると，これは [1] と素直に組み合わせることができて，その結果は

[1]+[3]　任意の正の実数 ε に対して，ある正の実数 δ が存在して，$0<|x-a|<\delta$ であるすべての x について $|g(f(x))-\alpha|<\varepsilon$ が成り立つ。

となり，$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=\alpha$ が成り立つ。