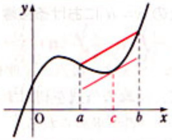
135 平均値の定理



差 $f(b)-f(a)$ には　平均値の定理

⟶ 不等式と平均値の定理の $a<c<b$ を結びつける。

適用する関数 $f(x)$ を決め，$a<c<b$ と $f'(c)$ を用いて，目的の不等式を示す。

例題 135 Ⅲ　平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$$\frac{1}{e^2}<a<b<1 \text{ のとき} \qquad a-b<b\log b-a\log a<b-a$$

解答

関数 $f(x)=x\log x$ は $x>0$ で微分可能で　$f'(x)=\log x+1$

区間 $[a,\ b]$ で平均値の定理を用いると

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

すなわち　$$\frac{b\log b-a\log a}{b-a}=\log c+1,\quad \log a<\log c<\log b$$

を満たす c が存在する。

$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ から　$-2<\log a<\log b<0$　←各辺の自然対数をとる。

ゆえに　$-2<\log c<0$　　よって　$-1<\log c+1<1$

すなわち　$$-1<\frac{b\log b-a\log a}{b-a}<1$$

この不等式の各辺に $b-a$ (>0) を掛けて

$$a-b<b\log b-a\log a<b-a$$ 終

POINT　平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

を満たす実数 c が存在する。

図形的には，曲線 $y=f(x)$ において，その上の2点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を結ぶ線分に平行な接線が引けるような点Cが，曲線上で，AとBの間にあることを示している。

類題 135　平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$$x>0 \text{ のとき} \qquad \frac{1}{x+1}<\log(x+1)-\log x<\frac{1}{x}$$