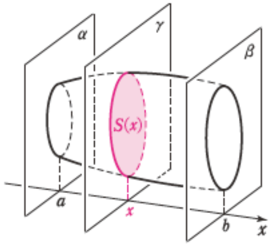
42 体　積

基本事項

立体の体積

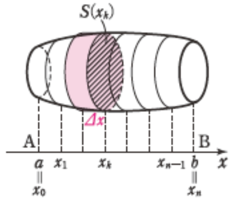
右の図のように x 軸に垂直で，x 軸との交点の座標が x である平面 γ による立体の切り口の面積を $S(x)$ とする。この立体の $x=a$ と $x=b$ の間にある部分の体積 V は次の式で表される。



$$V=\int_a^b S(x)\,dx \qquad (a<b)$$

証明　2 平面 α，γ に挟まれる部分の体積を $V(x)$ とする。
$\Delta x>0$ のとき　$\Delta V=V(x+\Delta x)\ \ V(x)$　とすると，
Δx が十分に小さいときは $\Delta V \fallingdotseq S(x)\Delta x$（$\Delta x<0$ のときも成り立つ）から　$\dfrac{\Delta V}{\Delta x}\fallingdotseq S(x)$
$\Delta x\ \to 0$ のとき，この両辺の差は 0 に近づくから　　$V(b)\ \ V,\ V(a)\ \ 0$
$V'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta V}{\Delta x}=S(x)$　　よって　$\displaystyle\int_a^b S(x)dx=V(b)\ \ V(a)=V$

区分求積法の考え方（$p.$ 440 参照）を用いると，次のようになる。



別証　区間 $[a,\ b]$ を n 等分して両端と分点を $a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n=b$ とし，$\dfrac{b\ \ a}{n}=\Delta x$，$x_k=a+k\Delta x$（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）とする。
各分点を通り x 軸に垂直な平面でこの立体を分割する。
分割した n 個の立体を，断面積が $S(x_k)$ で厚さが Δx の板状の立体であるとみなし，そのときの体積の和を V_n とすると　$V_n=\sum\limits_{k\ \ 1}^{n}S(x_k)\Delta x$
$n\ \to\infty$ のとき，$V_n\ \to V$ と考えられるから　$V=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k\ \ 1}^{n}S(x_k)\Delta x=\displaystyle\int_a^b S(x)dx$

回転体の体積

区間 $a\leqq x\leqq b$ において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V は，点 $(x,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切った断面積 $S(x)$ が $\pi\{f(x)\}^2$ であるから，次の式で表される。

$$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx \quad (a<b)$$

Check 問題

22　次の曲線と x 軸および直線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x}$，$x=2$，$x=4$　　　(2)　$y=e^{\frac{x}{4}}$，y 軸，$x=2$　　⇨

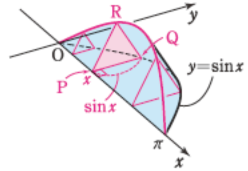
例題 290　断面積と体積（1）　★★☆☆☆

2 点 $\mathrm{P}(x,\ 0)$，$\mathrm{Q}(x,\ \sin x)$ を結ぶ線分を 1 辺とする正三角形を，x 軸に垂直な平面上に作る。P が x 軸上を原点 O から点 $(\pi,\ 0)$ まで動くとき，この正三角形が描く立体の体積を求めよ。

指針　立体の体積を積分で求めるときは，以下のようにする。
① 簡単な図をかいて，立体のようすをつかむ。
② 立体の **断面積 $S(x)$** を求める。…… この問題の断面は正三角形。
③ **積分区間** を定め，$V=\displaystyle\int_a^b S(x)dx$ により，体積を求める。

CHART　体積　断面積をつかむ

解答　線分 PQ を 1 辺とする正三角形の面積を $S(x)$ とすると



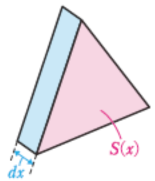
$$S(x)=\frac{1}{2}(\sin x)^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x$$

よって，求める立体の体積を V とすると

$$V=\int_0^\pi S(x)dx=\int_0^\pi\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x\,dx=\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^\pi(1\ \ \cos 2x)dx=\frac{\sqrt{3}}{8}\Big[x\ \ \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^\pi=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

検討　積分とその記号 $\int$ の意味

積分は英語で integral といい，その動詞である integrate は「積み上げる・集める」という意味である。
上の例題で $S(x)dx$ は，右の図のような薄い正三角柱の体積を表し，これを $x=0$ の部分から $x=\pi$ の部分まで積み上げる
［積分記号 $\int$ は和（sum）を表している］と考えるとよい。



練習 290　$a>0$ とする。半円 $x^2+y^2=a^2$，$y\geqq 0$ の周上に点 P をとり，P から x 軸に下ろした垂線の足を Q とする。線分 PQ を底辺とし，高さが OQ の長さに等しい二等辺三角形 PQR を x 軸に垂直な平面上に作る。点 P が半円の周上を端から端まで動くとき，△PQR が描く立体の体積を求めよ。

8章 42 体積

例題 293 x 軸の周りの回転体の体積 (2) ★★☆☆☆

$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ において，2つの曲線 $y=\sin 2x$，$y=\tan x$ で囲まれた図形を x 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。〔名古屋工大〕

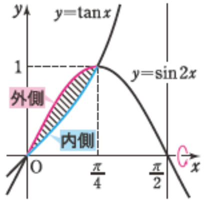
指針 体積でも面積の場合と同じで

CHART 体積　グラフをかく

求める体積 V は，右の図の斜線部分を x 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積であり，断面積は

(外側の円の面積)　(内側の円の面積)

となる。

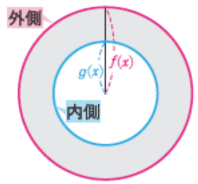


注意 $0\leqq g(x)\leqq f(x)$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の間の部分を x 軸の周りに1回転させてできる回転体を，x 軸に垂直な平面で切断したときの断面積 $S(x)$ は

(半径 $f(x)$ の円)　(半径 $g(x)$ の円)

$$=\pi\{f(x)\}^2 \quad \pi\{g(x)\}^2$$

である。$\pi\{f(x) \quad g(x)\}^2$ ではないので注意しよう。



解答 $\sin 2x=\tan x\ \left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$2\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

◀共有点の x 座標を求める。

よって　$\sin x(2\cos^2 x \quad 1)=0$

ゆえに　$\sin x=0,\ \cos x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$x=0,\ \dfrac{\pi}{4}$

また，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において　$0\leqq\tan x\leqq\sin 2x$

◀2つの曲線 $y \quad \sin 2x$, $y \quad \tan x$ のどちらが外側になるのかを調べている。

よって　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2 2x \quad \tan^2 x)dx$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{1 \quad \cos 4x}{2} \quad \left(\frac{1}{\cos^2 x} \quad 1\right)\right\}dx$$

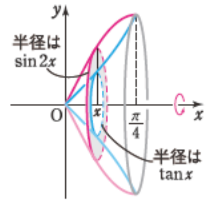
◀$1+\tan^2 x \quad \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2} \quad \frac{\cos 4x}{2} \quad \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{3}{2}x \quad \frac{\sin 4x}{8} \quad \tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{8}\pi(3\pi \quad 8)$$

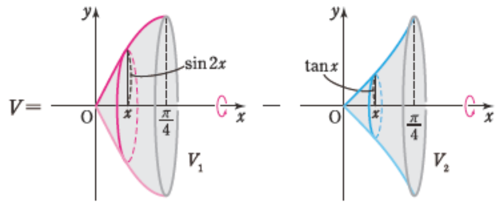
補足 点 $(x,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な平面を A とする。
A による立体の切り口において，
外側の円の半径は　$\sin 2x$
内側の円の半径は　$\tan x$
であるから，切り口の面積は
$\pi(\sin^2 2x \quad \tan^2 x)$



参考 次のように，体積 V を2つの回転体の体積の差としてとらえてもよい。

$V=$「曲線 $y=\sin 2x$，x 軸，直線 $x=\dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体 V_1 の体積」

「曲線 $y=\tan x$，x 軸，直線 $x=\dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体 V_2 の体積」



参考 平面上に曲線で囲まれた図形 F と，F と交わらない直線 ℓ があるとき，直線 ℓ の周りに F を1回転させてできる回転体の体積 V について，次の関係が成り立つ。

$V=$(F の重心が描く円周の長さ)×(F の面積)

これを **パップス・ギュルダンの定理** という。練習 293A (1) の解答参照。

練習 293 A 次の不等式で表される領域を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1) $x^2+(y \quad 2)^2\leqq 4$

(2) 連立不等式 $x^2+y^2\leqq 3$，$x^2+y^2+6y\geqq 3$ 〔(2) 類 弘前大〕

293 B xy 平面上に曲線 $C: y=x^2$ がある。C 上の2点 P，Q が PQ$=2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点の軌跡を D とする。

(1) D の方程式を求めよ。

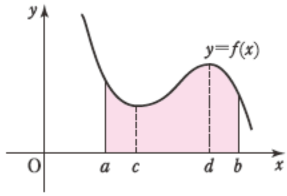
(2) C，D，y 軸および直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。〔横浜国大〕

8章
42
体積

例題 299　y 軸の周りの回転体の体積 (3)　★★★★☆

$0 \leqq a < b$ とする。$y=f(x)$ のグラフの $a \leqq x \leqq b$ の部分と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V は　$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$　…… ①

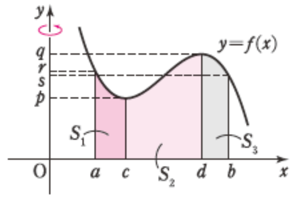
で与えられる。このことを，$a<c<d<b$ とし，右の図のような，区間 $[a, c]$，$[d, b]$ で単調に減少し，区間 $[c, d]$ で単調に増加する関数 $y=f(x)$ について示せ。また，$f(x)=x^3$，$a=0$，$b=2$ のときの V の値 V_0 を求めよ。



←例題 298

指針　y 軸の周りの回転体の体積は $\int ■\,dy$ で表されるから，① を導くために，置換積分法を適用 $[dy=f'(x)dx]$ する。そこで，y と x の対応が $1:1$ となるように，区間 $[a, b]$ を 3 つの区間 $[a, c]$，$[c, d]$，$[d, b]$ に分けて考えている。

答案　右の図の S_1，S_2，S_3 を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2，V_3 とする。また，$f(a)=r$，$f(c)=p$，$f(d)=q$，$f(b)=s$ とする。



このとき　$V_1=\pi c^2p+\pi\int_p^r x^2dy-\pi a^2r$

ここで，$y=f(x)$ から　$dy=f'(x)dx$

y	$p \to r$
x	$c \to a$

$$V_1=\pi\left\{c^2p+\int_c^a x^2f'(x)dx-a^2r\right\}$$

$$=\pi\left\{c^2p+\Big[x^2f(x)\Big]_c^a-\int_c^a 2xf(x)dx-a^2r\right\}$$

◀部分積分法を適用。

$$=\pi\left\{c^2p+a^2f(a)-c^2f(c)+2\int_a^c xf(x)dx-a^2r\right\}=2\pi\int_a^c xf(x)dx$$

同様にして，$V_2=\pi d^2q-\pi c^2p-\pi\int_p^q x^2dy=2\pi\int_c^d xf(x)dx$，

$V_3=\pi b^2s+\pi\int_s^q x^2dy-\pi d^2q=2\pi\int_d^b xf(x)dx$ であるから

$$V=V_1+V_2+V_3=2\pi\int_a^c xf(x)dx+2\pi\int_c^d xf(x)dx+2\pi\int_d^b xf(x)dx=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

よって，① が成り立つ。

ゆえに，① から　$V_0=2\pi\int_0^2 x\cdot x^3dx=2\pi\left[\dfrac{x^5}{5}\right]_0^2=\boldsymbol{\dfrac{64}{5}\pi}$

練習 299　次の図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=\cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$，$y=-1$，y 軸で囲まれた部分

(2)　2 曲線 $y=4^x$ $(x \geqq 0)$ と $y=8^x$ $(x \geqq 0)$ と直線 $x=1$ に囲まれた部分

〔(2) 類　同志社大〕