13 2 次関数の最大・最小

■基本事項■

1 2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小

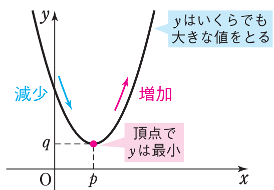
$p.111$ で学んだように，関数の値域における

最も大きな値を　**最大値**，　最も小さな値を　**最小値**

という。2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小については，a の符号によって，次の 2 通りに分けられる。

$a>0$ のとき

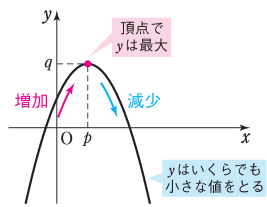
グラフは下に凸であり



$x=p$ で最小値 q をとる
最大値はない

$a<0$ のとき

グラフは上に凸であり



$x=p$ で最大値 q をとる
最小値はない

◀軸は直線 $x=p$
頂点は点 $(p,\ q)$

注意　定義域が与えられていない場合は，ふつう実数全体を定義域として考える。

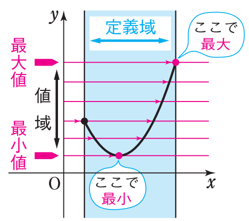
2 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ の最大・最小

2 次関数が一般形 $y=ax^2+bx+c$ で与えられたときは

基本形 $y=a(x-p)^2+q$ に変形

して，最大値・最小値を求めるようにする。

最大値・最小値に関する問題では，**グラフをかいて**，右の図のような見方で最大値・最小値を求める習慣をつけよう。



Check 問題

23　次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=2x^2+3$　　(2)　$y=-(x-3)^2$　　(3)　$y=3(x-1)^2+2$

(4)　$y=x^2+4x+5$　　(5)　$y=-x^2-6x+1$

⇨ 1，2

例題 79　2 次関数の最大・最小（実数全体が定義域）★☆☆☆☆

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

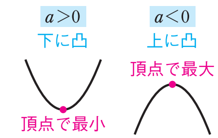
(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2+x-1$　　(2)　$y=-x^2+2\sqrt{2}\,x-2$

⇐例題 73

指針　まずは，**基本形 $y=a(x-p)^2+q$ に変形**。定義域は実数全体であるから，上に凸か下に凸かに注目。

下に凸 の放物線 ⟶ **頂点で最小，最大値はない。**

上に凸 の放物線 ⟶ **頂点で最大，最小値はない。**



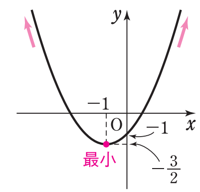
解答　(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2+x-1=\dfrac{1}{2}(x^2+2x)-1$

$=\dfrac{1}{2}(x^2+2x+1^2-1^2)-1$

$=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-\dfrac{3}{2}$

よって　　**$x=-1$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}$，**

最大値はない。



◀ x^2 の係数 $\dfrac{1}{2}$ でくくって平方完成。

◀ $a>0$
⟶グラフは下に凸
⟶頂点で最小
（最大値はない）

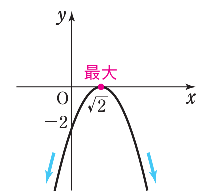
(2)　$y=-x^2+2\sqrt{2}\,x-2$

$=-\{x^2-2\sqrt{2}\,x+(\sqrt{2})^2\}$

$=-(x-\sqrt{2})^2$

よって　　**$x=\sqrt{2}$ で最大値 0，**

最小値はない。



◀符号に注意して変形。

◀ $a<0$
⟶グラフは上に凸
⟶頂点で最大
（最小値はない）

CHART　　2 次関数の問題

2 次式は　基本形 $y=a(x-p)^2+q$ に直せ

質問コーナー　最大値や最小値をとる x の値を答えに書かなくてよいのでしょうか？

▶ 1 次関数，2 次関数では，問題文に書かれてなくても，最大値や最小値をとる x の値をきちんと書いておくようにしよう。その理由は，

最大・最小となる x が存在し，かつ，その x が定義域に含まれることを確認するためである。

なお，最大値や最小値を求める問題で，最大値または最小値がない場合は，上の 解答 のように「**〜はない**」と忘れずに答えるようにしよう。

練習 79　次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

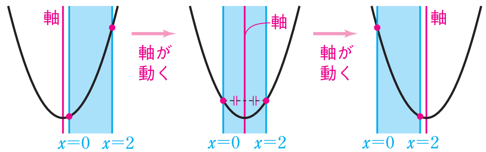
(1)　$y=\dfrac{1}{3}x^2-2x+1$　　(2)　$y=-\sqrt{2}\,x^2+4x-2$

例題 85　定義域一定，係数に文字を含む関数の最大・最小　★★★☆☆

a は定数とする。$0 \leqq x \leqq 2$ における関数 $f(x)=x^2-2ax-4a$ について

(1)　最大値を求めよ。　　(2)　最小値を求めよ。　⬅例題 84

指針　基本形に直すと
$f(x)=(x-a)^2-a^2-4a$
軸は直線 $x=a$ であるが，**文字 a の値が変わると，軸（グラフ）が動き，**区間 $0 \leqq x \leqq 2$ で最大・最小となる場所が変わる。



よって，軸の位置で **場合分け** をする。

(1)　**最大値**　関数 $y=f(x)$ のグラフは下に凸であるから，**軸から遠いほど y の値は大きい**。よって，区間の両端（$x=0$，$x=2$）と軸までの距離が等しいときの a の値が場合分けの境目となる。

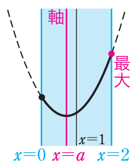
このの a の値は，区間 $0 \leqq x \leqq 2$ の中央の値で　$\dfrac{0+2}{2}=1$

(2)　**最小値**　グラフは下に凸であるから，軸が区間に含まれるときと含まれないとき，更に含まれないときは区間の左外か右外かで場合分けをする。

解答　$f(x)=x^2-2ax-4a=(x-a)^2-a^2-4a$
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$

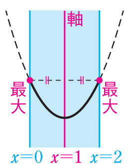
(1)　区間 $0 \leqq x \leqq 2$ の中央の値は　1

[1]　$a<1$ のとき
右のグラフから，$x=2$ で最大となる。
最大値は
$f(2)=2^2-2a\cdot2-4a$
$=-8a+4$



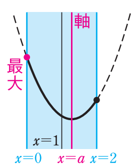
◀軸が区間の中央 $x=1$ より左にあるので，$x=2$ の方が軸から遠い。
よって　$f(0)<f(2)$

[2]　$a=1$ のとき
右のグラフから，$x=0$，2 で最大となる。最大値は
$f(0)=f(2)=-4$



◀軸が区間の中央 $x=1$ に一致するから，軸と $x=0$，2 との距離が等しい。
よって　$f(0)=f(2)$

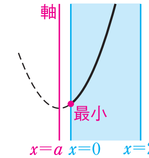
[3]　$a>1$ のとき
右のグラフから，$x=0$ で最大となる。
最大値は
$f(0)=-4a$



◀軸が区間の中央 $x=1$ より右にあるので，$x=0$ の方が軸から遠い。
よって　$f(0)>f(2)$

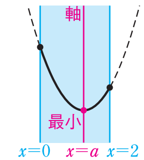
以上から
$$\begin{cases} \boldsymbol{a<1} \text{ のとき } \boldsymbol{x=2} \text{ で最大値 } \boldsymbol{-8a+4} \\ \boldsymbol{a=1} \text{ のとき } \boldsymbol{x=0,\ 2} \text{ で最大値 } \boldsymbol{-4} \\ \boldsymbol{a>1} \text{ のとき } \boldsymbol{x=0} \text{ で最大値 } \boldsymbol{-4a} \end{cases}$$

(2)　[4]　軸 $x=a$ が $x<0$ の範囲にあるとき，すなわち，$a<0$ のとき
右のグラフから，$x=0$ で最小となる。最小値は
$f(0)=-4a$



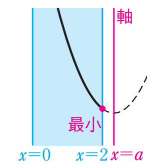
◀軸が区間の左外にあるから，区間の左端で最小となる。

[5]　軸 $x=a$ が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲にあるとき，すなわち，$0 \leqq a \leqq 2$ のとき
右のグラフから，$x=a$ で最小となる。最小値は
$f(a)=-a^2-4a$



◀軸が区間内にあるから，頂点で最小になる。

[6]　軸 $x=a$ が $2<x$ の範囲にあるとき，すなわち，$a>2$ のとき
右のグラフから，$x=2$ で最小となる。最小値は
$f(2)=-8a+4$

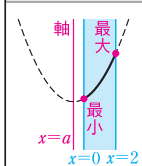
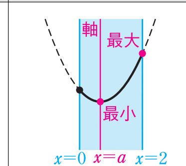
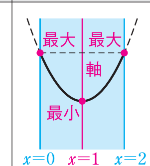
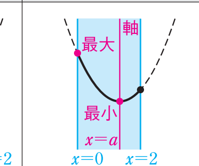
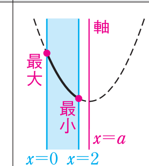


◀軸が区間の右外にあるから，区間の右端で最小となる。

以上から
$$\begin{cases} \boldsymbol{a<0} \text{ のとき } \boldsymbol{x=0} \text{ で最小値 } \boldsymbol{-4a} \\ \boldsymbol{0 \leqq a \leqq 2} \text{ のとき } \boldsymbol{x=a} \text{ で最小値 } \boldsymbol{-a^2-4a} \\ \boldsymbol{a>2} \text{ のとき } \boldsymbol{x=2} \text{ で最小値 } \boldsymbol{-8a+4} \end{cases}$$

◀等号は，どこに付けてもよい。

検討　$f(x)=x^2-2ax-4a$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最大値・最小値を同時に答えるときは，次のようになる。

① 軸が区間の **左外**	② 軸が区間の **内** で **中央より左**	③ 軸が区間の **内** で **中央**	④ 軸が区間の **内** で **中央より右**	⑤ 軸が区間の **右外**
				

① $a<0$ のとき　　最大値 $f(2)=-8a+4$，　最小値 $f(0)=-4a$
② $0 \leqq a<1$ のとき　最大値 $f(2)=-8a+4$，　最小値 $f(a)=-a^2-4a$
③ $a=1$ のとき　　最大値 $f(0)=f(2)=-4$，　最小値 $f(1)=-5$
④ $1<a \leqq 2$ のとき　最大値 $f(0)=-4a$，　最小値 $f(a)=-a^2-4a$
⑤ $a>2$ のとき　　最大値 $f(0)=-4a$，　最小値 $f(2)=-8a+4$

練習 85　a は定数とする。$0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $f(x)=3x^2-6ax+5$ について
(1)　最大値を求めよ。　　(2)　最小値を求めよ。

例題 92 2変数関数の最大・最小

★★★★☆

(1) x, y の関数 $P=x^2+2y^2-6x+4y-2$ の最小値を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 4$, $0\leqq y\leqq 4$ のとき，(1) の P の最大値と最小値を求めよ。

(3) x, y の関数 $Q=x^2-4xy+5y^2-6x+6y+10$ の最小値を求めよ。 ⬅例題 79

指針 特に条件が示されていないから，**x と y は互いに関係なく値をとる変数** である。
このようなときは，次のように x と y を別々にとらえて処理する。

1 **x, y のうちの一方の文字** [(1), (3) とも y] **を定数と考えて**，式を x の2次関数とみる。そして，**基本形 $a(x-p)^2+q$ に変形** する。

2 残った q (y の2次式) も **基本形 $b(y-r)^2+s$ に変形** する。

3 **aX^2+bY^2+s** ($a>0$, $b>0$, s は定数) **は**，$X^2\geqq 0$, $Y^2\geqq 0$ であるから，**$X=Y=0$ のとき最小値 s をとる** ことを利用する。

答案 (1) $P=x^2-6x+2y^2+4y-2$

$=(x-3)^2-9+2y^2+4y-2$ ◀まず，x について基本形に。

$=(x-3)^2+2y^2+4y-11$ ◀次に，y について基本形に。

$=(x-3)^2+2(y+1)^2-13$ ◀$P=aX^2+bY^2+s$ の形。

x, y は実数であるから　$(x-3)^2\geqq 0$, $(y+1)^2\geqq 0$ ◀**(実数)$^2\geqq 0$**

よって，P は $x-3=0$, $y+1=0$ のとき最小となる。

ゆえに　**$x=3$, $y=-1$ のとき最小値 -13**

(2) $0\leqq x\leqq 4$ のとき　$0^2\leqq (x-3)^2\leqq 3^2$ ◀$x=3$ で 0^2, $x=0$ で 3^2

$0\leqq y\leqq 4$ のとき　$1^2\leqq (y+1)^2\leqq 5^2$ ◀$y=0$ で 1^2, $y=4$ で 5^2

したがって，P は

$x=0$, $y=4$ のとき最大値 $3^2+2\cdot 5^2-13=$**46**

$x=3$, $y=0$ のとき最小値 $0^2+2\cdot 1^2-13=$**-11**

をとる。

(3) $Q=x^2-2(2y+3)x+5y^2+6y+10$

$=\{x-(2y+3)\}^2-(2y+3)^2+5y^2+6y+10$ ◀まず，x について基本形に。

$=\{x-(2y+3)\}^2+y^2-6y+1$ ◀次に，y について基本形に。

$=\{x-(2y+3)\}^2+(y-3)^2-8$ ◀$Q=aX^2+bY^2+s$ の形。

x, y は実数であるから

$\{x-(2y+3)\}^2\geqq 0$, $(y-3)^2\geqq 0$ ◀**(実数)$^2\geqq 0$** [$x-(2y+3)$ も実数]

よって，Q は $x-(2y+3)=0$, $y-3=0$ のとき最小となる。

$x-(2y+3)=0$, $y-3=0$ を連立して解くと

$x=9$, $y=3$

ゆえに　**$x=9$, $y=3$ のとき最小値 -8**

注意　(3) では Q の x^2 の係数が 1，y^2 の係数が 5 であるから，x について整理 (先に x について基本形に) したが，y について整理した方が処理しやすい場合もある (練習 92 (3) 参照)。

練習 92
(1) x, y の関数 $P=x^2+3y^2+4x-6y+2$ の最小値を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 3$, $0\leqq y\leqq 3$ のとき，(1) の関数 P の最大値と最小値を求めよ。

(3) x, y の関数 $Q=2x^2-2xy+y^2+2x+4y+6$ の最小値を求めよ。